Nombres complexes

Un *nombre complexe* est un objet mathématique qui peut s'écrire d'une seule manière sous la forme $a + b\mathrm{i}$, appelée *forme algébrique* avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

1. Approche algébrique

L'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes est un corps commutatif comprenant l'ensemble des nombres réels et contenant un élément noté i, parfois appelé *unité imaginaire*, satisfaisant les propriétés suivantes :

- son carré est défini par $\mathrm{i}^2 = -1$,
- pour tout $z \in \mathbf{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $z = a + b \times \mathrm{i}$ et dans ce cas on note $\mathrm{Re}(z) = a$ sa *partie réelle* et $\mathrm{Im}(z) = b$ sa *partie imaginaire*.

Remarque – La partie imaginaire est un *nombre réel*.

Puisque $\mathbf{C}$ est un corps, il satisfait les propriétés associées : identités remarquables, règle d'annulation du produit, opérations sur les puissances, formule de Bernoulli (sur la différence entre deux puissances de même degré), formule du binôme de Newton.

Propriété – Tout nombre réel est un carré dans $\mathbf{C}$.

Démonstration – Tout nombre réel positif est déjà un carré dans $\mathbf{R}$.
Pour tout $x \in \mathbf{R}^-$, on trouve $x = \left(\mathrm{i}\sqrt{-x}\right)^2$.

Remarque – L'ensemble $\mathbf{C}$ n'est pas muni d'une relation d'ordre total compatible.
En particulier, le nombre i n'est ni inférieur, ni supérieur à 0.

2. Conjugué et module

Définition – Pour tout $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbf{C}$, on appelle *nombre complexe conjugué* de z le nombre complexe $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$.

Propriétés – Pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Définition – Pour tout $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbf{C}$, on appelle *module* de z le réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Ce module étend la définition de la valeur absolue définie sur $\mathbf{R}$.

Propriétés – Pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z|^2 = z\ \bar{z}$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $|z z'| = |z| \times |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$

En particulier, on a obtenu le résultat suivant.

Formule de l'inverse

Pour tout $z \in \mathbf{C}^*$, on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Propriétés – Pour tout $(z, z') \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*$, on a $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Inégalité triangulaire
Pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}$, on a $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Démonstration – Soit $(z, z') \in \mathbf{C}$. On note $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = c + \mathrm{i}d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^2$.

On a les équivalences
$|z + z'| \leq |z| + |z'|$
$\Leftrightarrow (a + c)^2 + (b + d)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$
$\Leftrightarrow a c + b d \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$.
Si $a c + b d \leq 0$ alors l'inégalité est vraie. Dans le cas contraire, elle est équivalente à $(a c + b d)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
$\Leftrightarrow a^2 c^2 + b^2 d^2 + 2 a c b d \leq a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2$
$\Leftrightarrow 0 \leq a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2 a c b d \Leftrightarrow 0 \leq (a d - b c)^2$ qui est toujours vraie.

3. Équation du second degré à coefficients réels

Le fait que tout nombre réel soit un carré dans $\mathbf{C}$ permet d'étendre la résolution de l'équation du second degré.

Résolution de l'équation du second degré à coefficients réels dans C
Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^2$. On distingue trois cas selon le signe du discriminant Δ de l'équation $a x^2 + b x + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation n'a que deux solutions réelles : $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution qui est réelle : $\dfrac{-b}{2a}$.

– Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle mais a deux solutions complexes conjuguées qui sont $\dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Démonstration – On met sous forme canonique $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

Or quel que soit le signe du réel Δ, il existe un nombre complexe δ (réel ou imaginaire pur) tel que $\Delta = \delta^2$ d'où l'on tire $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b+\delta}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b-\delta}{2a}\right)$. La règle d'annulation du produit achève la démonstration.

4. Approche géométrique

Le *plan complexe* identifie les points d'un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes, en associant à chaque point M de coordonnées (x, y) son *affixe* $z = x + \mathrm{i}y$. La longueur OM correspond au module de z. Si $M \neq O$, une mesure de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ en radians correspond à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{OM'}$ sur le cercle trigonométrique parcouru dans le sens positif, où M' est l'intersection de ce cercle avec la demi-droite $[OM)$.

Définition – L'*argument* d'un nombre complexe z *non nul* désigne tout nombre réel $\arg(z) = \theta$ vérifiant les relations $\mathrm{Re}(z) = |z| \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = |z| \sin(\theta)$.

Propriété – Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous *forme trigonométrique* $z = \rho\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ où ρ est le module de z et θ est un argument de z.

Propriété – Deux nombres réels θ et θ' sont deux arguments d'un même nombre complexe non nul si et seulement si leur différence est un multiple de 2π.

Définition – Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on note $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Propriété – Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous *forme exponentielle* $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où ρ est le module de z et θ est un argument de z.

Propriété – Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.

Formule de De Moivre
Pour tout réel θ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.
Formules d'Euler
Pour tout réel θ on a $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$.

5. Racines de l'unité

Propriété – Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes satisfaisant l'équation $z^n = 1$, qui sont tous de module 1 et qui s'écrivent $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2k\pi/n}$, avec $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ et qu'on appelle *racines n-ièmes de l'unité*.

Démonstration – Pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $z^n = 1$ on a $|z|^n = |1| = 1$ donc $|z| = 1$ donc z s'écrit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

En outre, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ on a les équivalences $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z} : n\theta = 2k\pi$. Et pour tout $m \in \mathbf{Z}$, en notant q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de k par n on trouve $0 \leq r < n$ et $k = qn + r$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2k\pi/n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(2q\pi + 2r\pi/n)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2r\pi/n}$.

Réciproquement, tout nombre complexe sous cette forme est une racine de l'unité.

Enfin, ces nombres sont tous distincts puisque les arguments de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2k\pi/n}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2h\pi/n}$ diffèrent de $\dfrac{2(k-h)\pi}{n} \in]0\,;\,2\pi[$ si $0 \leq h < k < n$.

En particulier, les nombres 1, -1, i et $-\mathrm{i}$ sont les quatre racines quatrièmes de l'unité. Les racines troisièmes de l'unité sont les nombres 1, $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\pi/3}$ et $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\,\pi/3}$.

Propriété – La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle et le produit de ces racines vaut $(-1)^{n-1}$.

Démonstration – D'après la formule de la différence des puissances, on a $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/n} - 1) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2k\pi/n}\, 1^{n-1-k}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2n\pi/n} - 1^n = 1 - 1 = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2k\pi/n} = 0$.

En outre, on a $\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2k\pi/n} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S}$ où $S = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2\pi}{n}\,\dfrac{n(n-1)}{2} = (n-1)\pi$.

Donc on trouve $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Propriété – Soit $\omega = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Il existe exactement n nombres complexes satisfaisant l'équation $z^n = \omega$, qui s'écrivent $z = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)/n}$, avec $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$.

Démonstration – Les nombres proposés sont clairement des racines n-ièmes de ω.

Réciproquement, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $z^n = \omega$, le nombre $z' = \dfrac{z}{\sqrt[n]{\rho}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/n}$ vérifie $z'^n = \dfrac{\omega}{\rho}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1$ donc il existe un entier k entre 0 et $n-1$ tel que $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/n}$, donc z a bien la forme annoncée.

6. Exponentielle complexe

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ dont l'image est le cercle unité, ensemble des nombres complexes de module 1, correspondant au cercle de centre à l'origine et de rayon 1.

Cette fonction est continue au sens où sa partie réelle $(\cos)$ et sa partie imaginaire $(\sin)$ sont des fonctions continues.

Cette fonction n'est pas à valeurs réelles et ne satisfait pas les conclusions du théorème de Rolle : elle est 2π-périodique donc prend la même valeurs aux extrémités du segment $[0\,;2\pi]$ et pourtant sa dérivée $t \mapsto \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ne s'annule jamais.

Bibliographie

– Patrick Popescu-Pampu, « Écrire les imaginaires » — Images des Mathématiques, CNRS, 2015.

C. Boilley, lycée Châtelet de Douai – 21 janvier 2014